Fiche explicative et vulgarisée pour ma soutenance de thèse

Maël Forcier

December 14, 2022

Diapo 2

L'**optimisation** c'est le domaine des maths qui étudie les méthodes pour trouver le minimum d'une fonction.
En pratique, optimiser c'est trouver la meilleure décision à un problème donné. Par exemple, controler un centrale hydraulique.

Pendant tout l'exposé, on veut minimiser x et y.

Dans un cadre **multiétapes**, *multistage* en anglais, on prend une décision à chaque étape pendant une période donnée, par exemple tous les jours pendant un an
x_t: la décision que l'on prend au temps t

Dans un cadre à **2 étapes**, *2-stage* en anglais, on fait un choix aujourd'hui puis un choix demain: x : le choix d'aujourd'hui y : le choix de demain.

On prend la décision qui minimise un certain cout (par exemple $c^\top y$ pour le coût que l'on paiera demain) qui dépend d'un vecteur de coût c.

Ces décisions vérifient certaines contraintes (lois de la physiques, règles législatives etc):
Par exemple, demain on ne pourra pas avoir plus d'eau dans le réservoir que l'eau d'aujourd'hui plus la pluie, le ruissellement et moins l'eau que l'on a utilisé dans la turbine.

Diapo 3

On peut voir les décisions x et y comme des vecteurs (des tableaux de nombres, par exemple, l'eau dans le réservoir et l'eau que l'on utilise dans la turbine). Ces vecteurs peuvent être vus comme des points dans l'espace.

Toutes ces contraintes définissent un ensemble de décisions possibles. Cet ensemble des décisions possibles peut être vu comme une figure dans l'espace.

Comme les contraintes ont une forme particulière (inégalités affines), cet ensemble de décisions possibles est un **polyèdre** (en anglais *polyhedron* au singulier et *polyhedra* au pluriel). On appelle ce cadre l'**optimisation linéaire** ou *linear optimisation* en anglais.

Diapos 4-5 Comme on ne connait exactement pas les paramètres (par exemple la pluie) de demain et des jours futurs, on modélise ces paramètres par des variables aléatoires que l'on note en gras, par exemple $\boldsymbol{c}_t$ ou $\boldsymbol{\xi}_t$.
Stochastic veut dire avec présence d'aléatoire.
On ne connait pas le futur, on essaye juste de minimiser l'espérance des gains futurs, selon une certaine répartition appelé distribution de probabilité.
On prend une décision x_0 puis on observe la variable $\boldsymbol{\xi}_1$ puis on prend une décision x_1, puis on observe ξ_2, etc jusqu'à prendre la décision x_T.

$$x_0 \rightsquigarrow \boldsymbol{\xi}_1 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \boldsymbol{\xi}_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_{T-1} \rightsquigarrow \boldsymbol{\xi}_T \rightsquigarrow x_T$$

Diapo 6 Pour résoudre le problème multiétapes, on calcule la **fonction de coût espéré**, *expected cost-to-go function* en anglais, au temps t noté V_t en fonction du coût espéré au temps $t+1$, V_{t+1}.
Cette relation entre les deux fonctions s'appelle l'**équation de programmation dynamique**, *dynamic programming* en anglais.
Par exemple, on calcule combien on peut espérer payer le 7 août $V_t(x)$ pour tous les niveaux d'eau possible x dans le réservoir grâce au valeur des coûts espérés le 8 août $V_{t+1}(y)$ pour tous les niveaux d'eau possibles y.

Diapo 7 Illustration de la programmation dynamique. Il y a un nombre fini de décisions possibles. On utilise l'étape suivante pour calculer l'étape précédente et ainsi de suite.

Diapo 8 Dans la réalité, les valeurs des variables aléatoires peuvent prendre un nombre infi et continu de valeurs, par exemple quantité d'eau tombé entre 0 et 100mm.
Pour simplifier, les gens remplacent ces variables aléatoires par un nombre fini de valeurs, par exemple juste 25 mm et 75mm, qu'on appelle les scénarios.

Diapo 9 La question principale de ma thèse est celle de la **discrétisation exacte**, *exact quantization* en anglais : Est-ce que je peux remplacer une variable aléatoire continue (en vert sur la slide) par un nombre fini de scénarios (en violet sur la slide) sans changer le calcul du coût espéré ?

Diapos 10 à 13 Je regarde quand est-ce que c'est possible ? Je donne 3 contre exemples pour montrer que ce n'est pas possible selon certains cas que je marque ces cas dans le tableau avec des croix rouges.

Diapo 14 Les autres cas sont possibles (en vert dans le tableau). Ces résultats sont des théorèmes que j'ai prouvé et écrit dans des articles avec mes directeurs de thèse. **FGL** veut dire Forcier, Gaubert, Leclère et **FL** veut dire Forcier, Leclère.

Diapo 15 Les chapitres de ma thèse et les articles que j'ai écrits et publié.

Diapo 15 à 19 J'essaye de transformer le coût aléatoire et continu $\boldsymbol{c}$ en un nombre fini scénario. Du coup je sépare selon ces arcs de cercle en vert qui forment l'**éventail normal**, *normal fan* en anglais. Puis je remplace par des scénarios en violet.

Diapo 20 à 26 Je regarde ce qui se passe quand je fais varier x, par exemple quand je change la décision et je montre que ça marche pour toutes les décisions en même temps.

Diapos 27-28 Je montre comment passer du cas à 2 étapes au cas multiétapes.

Diapos 29-30 Je montre des résultats de complexité : cela permet de classer à quel point un problème est dur en informatique.

Diapos 31 à 45 Je présente plusieurs algorithmes inventés par d'autres chercheurs (et quelques nouvelles variantes que j'ai imaginées). Je prouve que ces algorithmes convergent, c'est-à-dire qu'ils calculent le bon résultat. Et je prouve leur complexité, c'est-à-dire le temps qu'ils mettent à retourner le bon résultat.